با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی و آمار ۳ دوازدهم
فصل دوم

عنوان فصل: الگوهای خطی

از صفحه‌ی ۴۵ تا صفحه‌ی ۷۲ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل الگوهای خطی آمده است.

مباحث فصل: درس ۱ مدل‌سازی و دنباله، درس ۲ دنباله‌های حسابی

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۴۶ · فعالیت — درس ۱ · مدل‌سازی	۵
۲	صفحه ۴۷ · فعالیت — درس ۱ · مدل‌سازی	۶
۳	صفحه ۴۸ · کار در کلاس — درس ۱ · مدل‌سازی (۲ پرسش)	۷
۵	صفحه ۵۰ · فعالیت — درس ۱ · مدل‌سازی (کاربردی دیگر از مجموعه‌ی اعداد طبیعی)	۹
۶	صفحه ۵۲ · فعالیت — درس ۱ · دنباله	۱۰
۷	صفحه ۵۴ · کار در کلاس — درس ۱ · دنباله	۱۱
۸	صفحه ۵۶ · کار در کلاس — درس ۱ · دنباله	۱۲
۹	صفحه ۵۷ · تمرین — درس ۱ · مدل‌سازی (۲ پرسش)	۱۳
۱۱	صفحه ۵۸ · تمرین — درس ۱ · مدل‌سازی	۱۵
۱۲	صفحه ۵۸ · تمرین — درس ۱ · دنباله (۳ پرسش)	۱۶
۱۵	صفحه ۵۹ · تمرین — درس ۱ · دنباله (۳ پرسش)	۱۷

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ صفحه ۵۹ · تمرین — درس ۱ · دنباله (محاسبهٔ جذر در تمدن بابل) ۱۹

۱۹ صفحه ۶۰ · تمرین — درس ۱ · دنباله (۲ پرسش) ۲۰

۲۱ صفحه ۶۰ · بازی و ریاضی — درس ۱ · دنباله ۲۱

۲۲ صفحه ۶۱ · فعالیت — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۲۱

۲۳ صفحه ۶۴ · کار در کلاس — درس ۲ · دنباله‌های حسابی (۴ پرسش) ۲۴

۲۷ صفحه ۶۶ · فعالیت — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۲۶

۲۸ صفحه ۶۷ · کار در کلاس — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۲۸

۲۹ صفحه ۶۸ · فعالیت — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۲۹

۳۰ صفحه ۶۸ · کار در کلاس — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۳۰

۳۱ صفحه ۷۰ · کار در کلاس — درس ۲ · مجموع جملات دنبالهٔ حسابی (۳ پرسش) ۳۰

۳۴ صفحه ۷۱ · تمرین — درس ۲ · دنباله‌های حسابی (۷ پرسش) ۳۱

۴۱ صفحه ۷۱ · تمرین — درس ۲ · مجموع جملات دنبالهٔ حسابی ۳۴

۴۲ صفحه ۷۲ · تمرین — درس ۲ · مجموع جملات دنبالهٔ حسابی (۲ پرسش) ۳۴

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

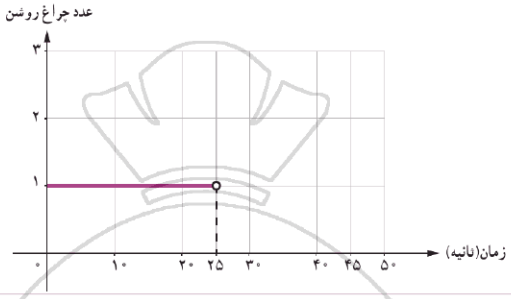
irantooshe.ir

۱ صفحه ۴۶ **فعالیت**

۱. یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه‌ی شروع به‌کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۴۵ ثانیه‌ی اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

اگر چراغ روشنِ سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد و f(t) عدد چراغ روشن در ثانیه‌ی tام باشد، با توجه به فرض ضابطه، دامنه و برد تابع و نمودار را کامل کنید.

$$f(t)=\begin{cases}۱ & ۰\le t<۲۵\\ \cdots & ۲۵\le t<۳۰\\ ۳ & \cdots\le t<\cdots\end{cases} \qquad D_f=\{t\in\mathbb{R}\mid \cdots\le t<\cdots\},\ R_f=\{\ ,\ ,\ \}$$



چراغ ابتدا ۲۵ ثانیه سبز است (۰ تا ۲۵)، سپس ۵ ثانیه زرد (۲۵ تا ۳۰) و بعد ۱۵ ثانیه قرمز (۳۰ تا ۴۵). در هر بازه عدد چراغ روشن ثابت است، پس تابع چندضابطه‌ای است:

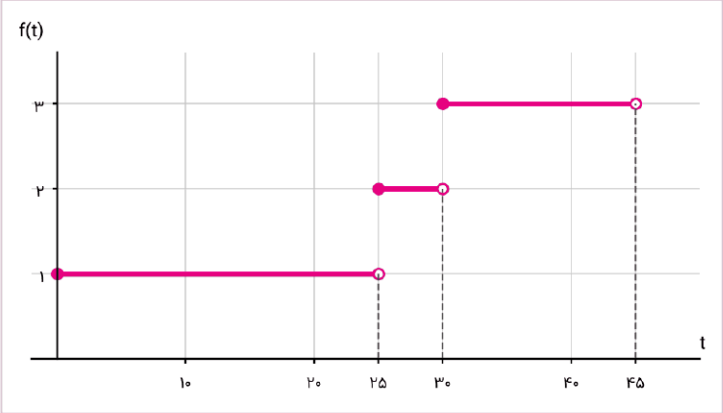
- $f(t)=1 \quad , \quad 0\le t<25$
- $f(t)=2 \quad , \quad 25\le t<30$
- $f(t)=3 \quad , \quad 30\le t<45$

دامنه همه‌ی لحظه‌های ۴۵ ثانیه‌ی اول است و چراغ فقط یکی از سه عدد ۱، ۲ یا ۳ را نشان می‌دهد:

- $D_f=\{t\in\mathbb{R}\mid 0\le t<45\}$
- $R_f=\{1,\ 2,\ 3\}$

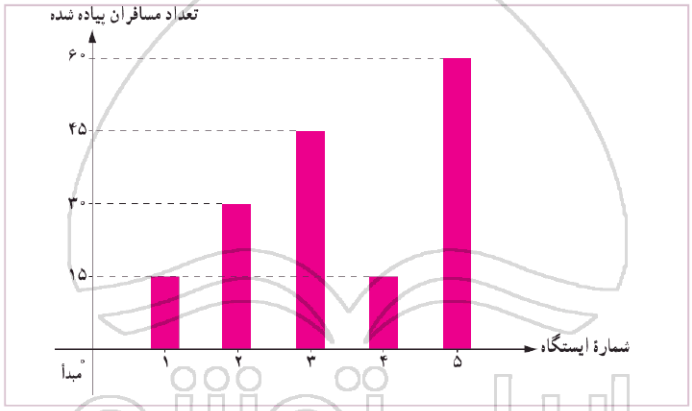
نمودار: سه پاره‌خط افقی در ارتفاع‌های ۱ و ۲ و ۳ است. ابتدای هر پاره‌خط توپر (چون ≤) و انتهای آن توخالی (چون <) رسم می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

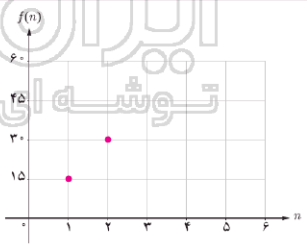


۲ صفحه ۴۷ **فعالیت**

۲. نمودار میله‌ای زیر، تعداد مسافران پیاده‌شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می‌دهد. اگر n، شمارهٔ ایستگاه و f(n) تعداد مسافران پیاده‌شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰	.....	.....	.....



$$f(n)=\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots & ۱\le n\le ۳ \\ ۱۵+۴۵(n-۴) & ۴\le n\le ۵ \end{cases} \quad n\in\mathbb{N}$$

$$D_f=\{n\in\mathbb{N}\mid \cdots\le n\le\cdots\} \qquad R_f=\{\ ,\ ,\ ,\ \}$$

از ارتفاع میله‌ها می‌خوانیم: ایستگاه‌های ۱ تا ۵ به ترتیب ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۱۵ و ۶۰ مسافر دارند.

n	۱	۲	۳	۴	۵
f(n)	۱۵	۳۰	۴۵	۱۵	۶۰

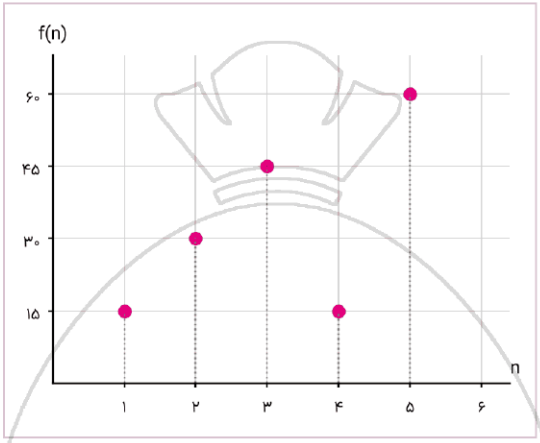
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

برای $1 \le n \le 3$ مقدارها ۱۵ برابر n هستند (۱۵، ۳۰، ۴۵). برای $4 \le n \le 5$ ضابطه‌ی داده‌شده را آزمایش می‌کنیم:

$f(4) = 15 + 45\times 0 = 15$ و $f(5) = 15 + 45\times 1 = 60$ که با نمودار می‌خواند. پس:

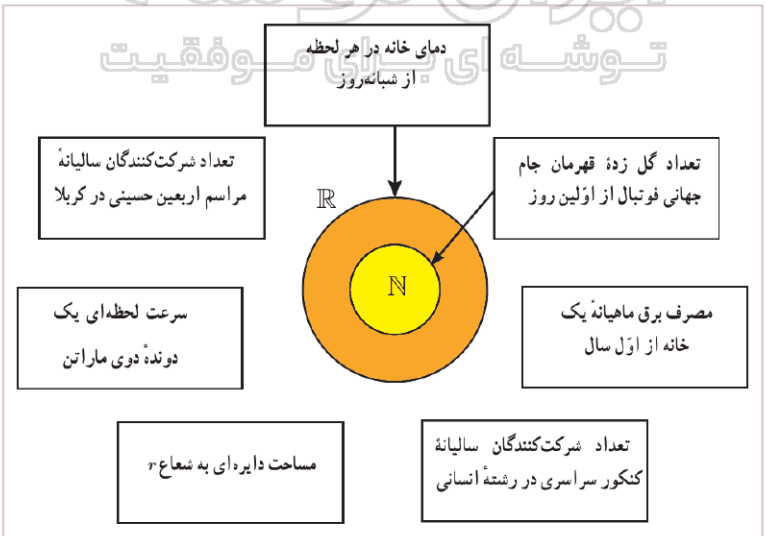
- $f(n) = 15n \quad , \quad 1 \le n \le 3$
- $f(n) = 15 + 45(n-4) \quad , \quad 4 \le n \le 5$
- $D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le 5\}$
- $R_f = \{15,\ 30,\ 45,\ 60\}$

نمودار تابع، پنج نقطه‌ی جدا از هم است (چون دامنه زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی است، نقاط را به هم وصل نمی‌کنیم):



۳ صفحه ۴۸ **کار در کلاس**

۱. اگر f تابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، مانند نمونه، دامنه‌ی هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



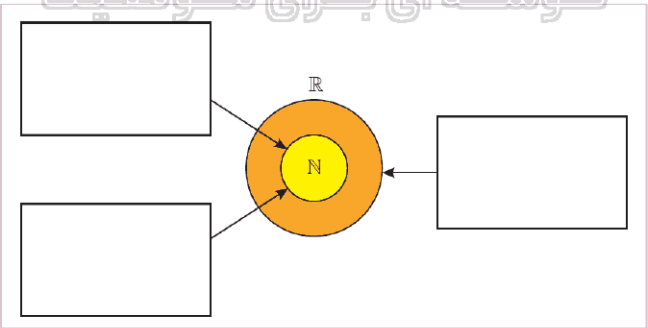
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

اگر پاسخ مسئله به زمان یا مرحله‌ی شمارش‌شده (روز اول، دوم، ... ؛ ماه اول، دوم، ... ؛ سال اول، دوم، ...) وابسته باشد دامنه زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) است، و اگر در هر لحظه یا به ازای هر مقدار حقیقی قابل بررسی باشد دامنه زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است.

مسئله	دامنه	دلیل
دمای خانه در هر لحظه از شبانه‌روز	$\mathbb{R}$	در هر لحظه‌ی دلخواه می‌توان دما را اندازه گرفت
تعداد شرکت‌کنندگان سالیانه‌ی مراسم اربعین حسینی در کربلا	$\mathbb{N}$	سال اول، دوم، ... (شماره‌ی سال)
تعداد گل زده‌ی قهرمان جام جهانی فوتبال از اولین روز (نمونه)	$\mathbb{N}$	روز اول، دوم، ...
سرعت لحظه‌ای یک دونده‌ی دوی ماراتن	$\mathbb{R}$	سرعت در هر لحظه‌ی دلخواه تعریف می‌شود
مصرف برق ماهیانه‌ی یک خانه از اول سال	$\mathbb{N}$	ماه اول، دوم، ...
تعداد شرکت‌کنندگان سالیانه‌ی کنکور سراسری در رشته‌ی انسانی	$\mathbb{N}$	سال اول، دوم، ...
مساحت دایره‌ای به شعاع r	$\mathbb{R}$	شعاع هر عدد حقیقی مثبتی می‌تواند باشد

۴ صفحه ۴۸ **کار در کلاس**

۲. داخل هر کدام از مستطیل‌های زیر مسئله‌ای را بنویسید که دامنه‌ی مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد.



در شکل، پیکان دو مستطیل سمت چپ به مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و پیکان مستطیل سمت راست به مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ می‌رسد. نمونه‌ی مسئله‌ها (پاسخ‌های دیگر هم درست است اگر نوع دامنه با شکل بخواند):

- مستطیل بالاچپ ($\mathbb{N}$): میزان فروش یک مغازه در هر ماه از سال (ماه اول، دوم، ...).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

- مستطیل پایین‌چپ ($\mathbb{N}$): تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه در هر سال تحصیلی.
- مستطیل سمت راست ($\mathbb{R}$): ارتفاع توپی که رها شده است، در هر لحظه‌ی دلخواه.

۵ صفحه ۵۰ **فعالیت**

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی‌ماه ۱۳۹۶ به‌طور تقریبی نشان می‌دهد:

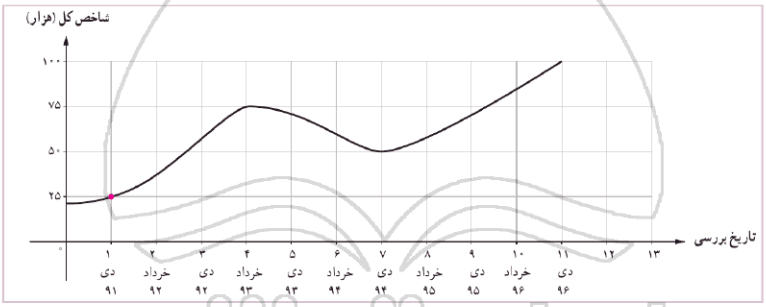
الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام در تاریخ‌های نوشته‌شده معلوم شده است. در سری زمانی بالا، شاخص کل در چه فاصله‌ای روند کاهشی و در چه فاصله‌ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟

ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و ... و دی ۱۳۹۶ را یازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه‌ی میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی‌ماه ۱۳۹۴ تا دی‌ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک اعداد زیر تقریب بهتری برای f(۱۳) است؟ چرا؟

۱) ۸۵,۰۰۰ ۲) ۱۰۵,۰۰۰ ۳) ۱۱۲,۵۰۰ ۴) ۱۰۰,۰۰۰ ۵) ۱۲۵,۰۰۰

د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به‌دست آمده برای دی‌ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.



الف) نقطه‌ی اول روی محور ($n = ۱$) مقدار ۲۵ هزار را نشان می‌دهد و هر عدد صحیح روی محور افقی یک تاریخ بررسی است (دی ۹۱، خرداد ۹۲، دی ۹۲، ...، دی ۹۶). از روی نمودار:

- از $n = ۱$ تا $n = ۴$ (دی ۹۱ تا خرداد ۹۳) و نیز از $n = ۷$ تا $n = ۱۱$ (دی ۹۴ تا دی ۹۶): روند افزایشی، چون با بیشتر شدن n، نمودار بالاتر می‌رود.
- از $n = ۴$ تا $n = ۷$ (خرداد ۹۳ تا دی ۹۴): روند کاهشی، چون با بیشتر شدن n، نمودار پایین می‌آید.

ب) مقدار نمودار را در هر عدد n می‌خوانیم (مقدارها تقریبی‌اند):

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
f(n) (هزار)	۲۵	۳۷	۵۷	۷۵	۷۰	۶۰	۵۰	۵۸	۷۰	۸۵	۱۰۰

ج) از $n = ۷$ تا $n = ۱۱$ شاخص از ۵۰ هزار به ۱۰۰ هزار رسیده است؛ یعنی در ۴ گام ۵۰ هزار افزایش، میانگین افزایش هر گام حدود ۱۲٫۵ هزار. اگر رفتار همین‌طور ادامه یابد، $f(۱۲) \approx ۱۱۲,۵۰۰$ و $f(۱۳) \approx ۱۱۲,۵۰۰ + ۱۲,۵۰۰ = ۱۲۵,۰۰۰$. پس گزینه‌ی **۵** (۱۲۵,۰۰۰) تقریب بهتری است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

د) این قسمت به مراجعه به پایگاه اینترنتی بورس نیاز دارد. شاخص کل در دی ۱۳۹۷ بسیار بیشتر از ۱۲۵ هزار بود؛ یعنی رشد شاخص پس از دی ۹۶ از روند خطی گام‌های قبل تندتر شد و تقریب بالا مقدار واقعی را کمتر از حد برآورد می‌کند. (مقدار دقیق را از پایگاه گفته‌شده بخوانید.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶ صفحه ۵۲ فعالیت

برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث زیر، اعداد هر سطر را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

اگر n شمارهٔ هر سطر و a_n (جملهٔ nام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

الف) با محاسبهٔ مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.

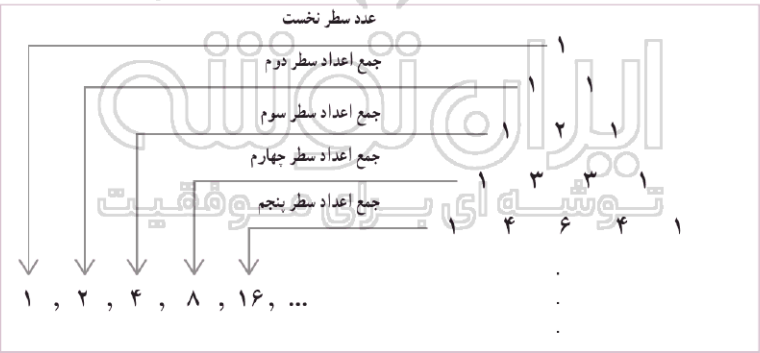
ب) بر اساس رابطهٔ میان a_1 و a_2 و رابطهٔ میان a_2 و a_3 و نیز a_3 و a_4 می‌توان مقادیر a_4 و a_5 را مشخص کرد؟ چگونه؟

ج) آیا به کمک قسمت ب، می‌توانیم رابطهٔ میان هر دو جملهٔ متوالی، یعنی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به‌دست می‌آید؟ چرا؟

د) رابطه‌ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطهٔ بازگشتی می‌نامیم. برای دنبالهٔ اعداد بالا رابطه‌ای بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنبالهٔ بالا را مشخص کند.

هـ) رابطه‌ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. ($n \in \mathbb{N}$)

و) رابطهٔ بازگشتی به‌دست‌آمده در قسمت «د» چه تفاوتی با ضابطهٔ به‌دست‌آمده از قسمت «ج» دارد؟



الف) سطر ششم: $1, 5, 10, 10, 5, 1$ با مجموع $a_6 = 32$؛ سطر هفتم: $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$ با مجموع $a_7 = 64$.

ب) دنباله‌ی مجموع‌ها $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ است. هر جمله دو برابر جمله‌ی قبل است: $a_2 = 2a_1$ و $a_3 = 2a_2$. پس بله: $a_4 = 2a_3 = 8$ و $a_5 = 2a_4 = 16$ (که با سطرهای چهارم و پنجم مثلث می‌خواند).

ج) بله، رابطه‌ی میان هر دو جمله‌ی متوالی $a_{n+1} = 2a_n$ است. ولی این رابطه فقط این دنباله را نمی‌دهد: مثلاً با $a_1 = 3$ دنباله‌ی $3, 6, 12, 24, \ldots$ هم از آن به‌دست می‌آید؛ چون رابطه به جمله‌ی اول بستگی ندارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

د) رابطه‌ی بازگشتی دنباله‌ی بالا: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$ (با مشخص کردن جمله‌ی اول، فقط همین دنباله ساخته می‌شود).

هـ) $a_n = 2^{n-1}$ ؛ زیرا $a_1 = 2^0 = 1$ ، $a_2 = 2^1 = 2$ ، $a_3 = 2^2 = 4$ و ... .

و) در رابطه‌ی بازگشتی برای رسیدن به یک جمله مثل جمله‌ی دهم باید جمله‌های قبلی را یکی‌یکی حساب کنیم (از a_9 ، و آن هم از a_8 و ...). اما در ضابطه‌ی $a_n = 2^{n-1}$ هر جمله مستقیم و فقط با دانستن n به‌دست می‌آید؛ مثلاً $a_{10} = 2^9 = 512$.

۷ صفحه ۵۴ **کار در کلاس**

با توجه به ضابطهٔ دنبالهٔ داده‌شده، جاهای خالی را پر کنید.

پنج جملهٔ اول دنباله	جملهٔ nاُم
۱ , ۴ , ۷ , ۱۰ , ۱۳	$a_n = ۳n - ۲$
۰ , ۳ , ۸ , ... , ۲۴	$b_n = n^۲ - ۱$
..... , $\frac{۱}{۲}$, ... , ... , ...	$c_n = \frac{۱}{n}$
..... , ... , $-\frac{۱}{۳}$, $\frac{۱}{۲}$, -۱	$d_n = \frac{(-۱)^n}{n}$

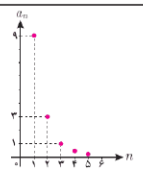
در هر ضابطه به جای n به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌گذاریم:

جمله‌ی nام	پنج جمله‌ی اول دنباله
$a_n = 3n - 2$	۱ ، ۴ ، ۷ ، ۱۰ ، ۱۳
$b_n = n^2 - 1$	۰ ، ۳ ، ۸ ، ۱۵ ، ۲۴
$c_n = \frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$

مثلاً برای b_n : $b_4 = 4^2 - 1 = 15$ ؛ و برای d_n : $d_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$ و $d_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

جدول زیر را کامل کنید.

نمودار دنباله	ضابطهٔ دنباله	فرمول بازگشتی	جملات دنباله
	$a_n = ۳^{۳-n}$	$a_{n+۱} = \frac{۱}{۳} a_n$ $a_۱ = ۹$	$۹, ۳, ۱, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۹}, \dots$
		$a_{n+۱} = \frac{۱}{۳} a_n$ $a_۱ = ۱$	
	$a_n = ۲n + ۱$		
		$a_{n+۱} = a_n + n$ $a_۱ = ۱$	
			$۱, -\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۵}, -\frac{۱}{۷}, \dots$
			$-۱, -۴, -۹, -۱۶, \dots$
		$a_{n+۲} = a_{n+۱} + a_n$ $a_۱ = a_۲ = ۱$	

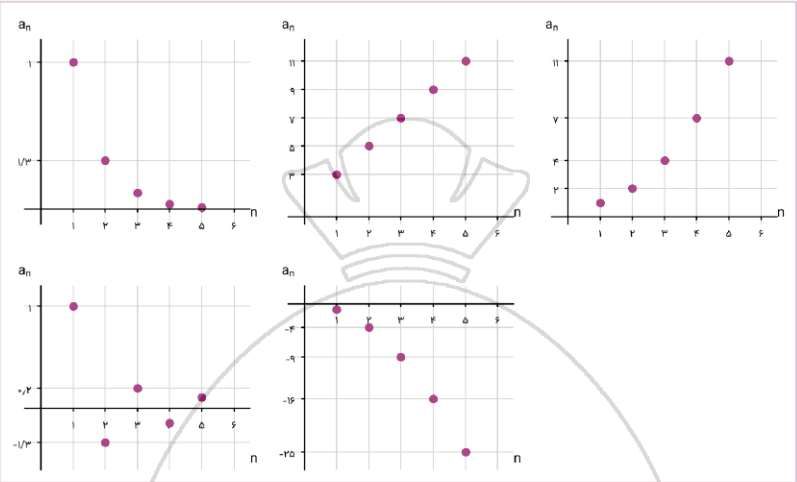
خانه‌های خاکستری نیاز به پر کردن ندارند. هر ردیف را از اطلاعات موجود کامل می‌کنیم:

ردیف	جملات دنباله	فرمول بازگشتی	ضابطه‌ی دنباله
۲	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$	$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n,\ a_1 = 1$	$a_n = (\frac{1}{3})^{n-1} = 3^{1-n}$
۳	$3, 5, 7, 9, 11, \dots$	$a_{n+1} = a_n + 2,\ a_1 = 3$	$a_n = 2n + 1$
۴	$1, 2, 4, 7, 11, \dots$	$a_{n+1} = a_n + n,\ a_1 = 1$	—
۵	$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$	—	$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
۶	$-1, -4, -9, -16, \dots$	—	$a_n = -n^2$
۷	$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ a_1 = a_2 = 1$	—

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

توضیح: ردیف ۲: هر جمله $\frac{1}{3}$ جمله‌ی قبل است (۱ ، ۱/۳ ، ۱/۹ ، ...) و چون $a_1 = 1 = (\frac{1}{3})^0$ ضابطه $(\frac{1}{3})^{n-1}$ است. ردیف ۳: ضابطه، $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ \ldots$ را می‌دهد و هر جمله ۲ واحد بیشتر از قبلی است. ردیف ۴: $a_2 = 1 + 1 = 2,\ a_3 = 2 + 2 = 4,\ a_4 = 4 + 3 = 7,\ a_5 = 7 + 4 = 11$. ردیف ۵: مخرج‌ها اعداد فرد $2n - 1$ و علامت‌ها یکی در میان‌اند (n فرد مثبت). ردیف ۶: $\ldots, -(3^2), -(2^2), -(1^2)$. ردیف ۷: دنباله‌ی فیبوناچی؛ هر جمله مجموع دو جمله‌ی قبل است.

نمودار ردیف‌های ۲ تا ۶ (نقاط جدا از هم، به ازای $n = 1$ تا ۵) به ترتیب زیر است (سطر بالا از چپ به راست: ردیف ۲، ۳، ۴ ؛ سطر پایین: ردیف ۵ و ۶):



۹ صفحه ۵۷ تمرین

۱. برای محاسبهٔ قبض آب (آب‌بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و بر اساس آن «طبقهٔ مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطهٔ زیر، آب‌بها محاسبه می‌شود: هزینهٔ هر متر مکعب با توجه به طبقهٔ مصرف × میانگین مصرف = آب‌بها

الف) نمودار «طبقهٔ مصرف ــ آب‌بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی در تهران در یک ماه $20/49\ m^3$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب‌بها را مشخص می‌کند؟

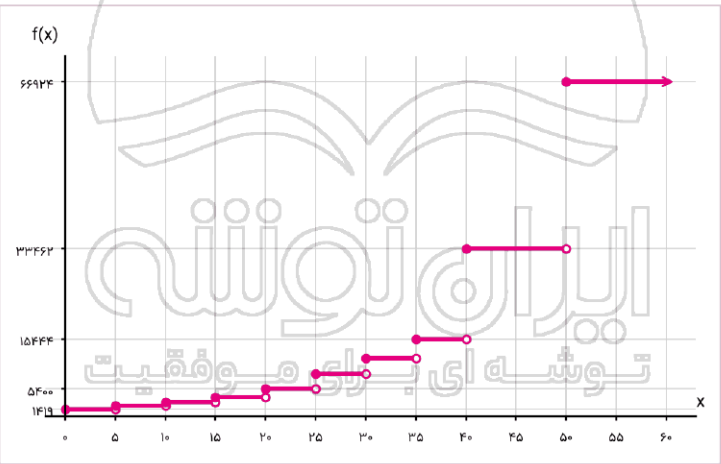
هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۸/۴۹۶	$25 \le x < 30$
۱۱/۵۸۰	$30 \le x < 35$
۱۵/۴۴۴	$35 \le x < 40$
۳۳/۴۶۲	$40 \le x < 50$
۶۶/۹۲۴	$x \ge 50$

هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۱/۴۱۹	$0 \le x < 5$
۲/۱۲۳	$5 \le x < 10$
۲/۸۲۷	$10 \le x < 15$
۳/۷۰۳	$15 \le x < 20$
۵/۴۰۰	$20 \le x < 25$

ایران توشه
irantooshe.ir

الف) مقدار هزینه برای همه‌ی x های هر طبقه ثابت است؛ پس تابع پلکانی (چندضابطه‌ای) است. اگر x میانگین مصرف (متر مکعب) و f(x) هزینه‌ی هر متر مکعب (ریال) باشد:

- $f(x) = 1419 \ , \ 0 \le x < 5$
- $f(x) = 2123 \ , \ 5 \le x < 10$
- $f(x) = 2827 \ , \ 10 \le x < 15$
- $f(x) = 3703 \ , \ 15 \le x < 20$
- $f(x) = 5400 \ , \ 20 \le x < 25$
- $f(x) = 8496 \ , \ 25 \le x < 30$
- $f(x) = 11580 \ , \ 30 \le x < 35$
- $f(x) = 15444 \ , \ 35 \le x < 40$
- $f(x) = 33462 \ , \ 40 \le x < 50$
- $f(x) = 66924 \ , \ x \ge 50$
- $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$
- $R_f = \{1419, 2123, 2827, 3703, 5400, 8496, 11580, 15444, 33462, 66924\}$



ب) برای میانگین مصرف x، سطح زیر نمودار از ۰ تا x مستطیلی به عرض x و ارتفاع f(x) است. مساحت آن برابر x·f(x)، یعنی همان آب‌بها است. پس تابع آب‌بها $g(x) = x \cdot f(x)$ است (مثلاً $g(x) = 1419x$ برای $0 \le x < 5$ و $g(x) = 5400x$ برای $20 \le x < 25$).

برای $x = 20.49$: چون $20 \le 20.49 < 25$ ، $f(20.49) = 5400$ و آب‌بها $g(20.49) = 20.49 \times 5400 = 110646$ ریال است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰ صفحه ۵۷ تمرین

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هرکدام از مسائل زیر باشد، دامنهٔ هرکدام از آنها را مشخص کنید. (هر مورد: $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{R}$)

الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر

ب) میزان استفادهٔ دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت

ج) حجم مکعبی به ضلع x

د) تغییرات سطح دریاچهٔ ارومیه در بیست سال اخیر

هـ) میزان مصرف ماهیانهٔ آب در یک واحد مسکونی

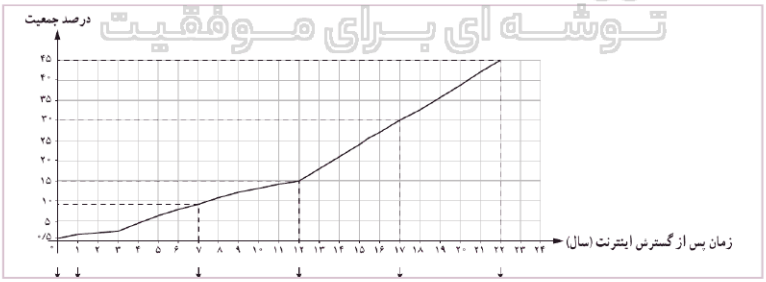
- **الف)** $\mathbb{R}$؛ ارتفاع هر مقدار حقیقی بین ۰ تا ۱۵ کیلومتر می‌تواند باشد.
- **ب)** $\mathbb{N}$؛ ساعت اول، دوم، ... (شماره‌ی ساعت).
- **ج)** $\mathbb{R}$؛ طول ضلع هر عدد حقیقی مثبت می‌تواند باشد.
- **د)** $\mathbb{N}$؛ سال اول، دوم، ... (شماره‌ی سال، ۲۰ سال).
- **هـ)** $\mathbb{N}$؛ ماه اول، دوم، ... (شماره‌ی ماه).

۱۱ صفحه ۵۸ تمرین

۳. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده‌اند.

الف) اگر f(n) درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده‌شده مقادیر f(۱) و f(۷) را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟



الف) از نمودار: $f(1) \approx 1$ و $f(7) \approx 9$ (مقدارها تقریبی‌اند). معنا: یک سال پس از گسترش اینترنت (۱۹۹۴) حدود ۱٪ جمعیت جهان و ۷ سال پس از آن (سال ۲۰۰۰) حدود ۹٪ جمعیت جهان از اینترنت استفاده می‌کردند.

توشه ای برای موفقیت

ب) سال ۲۰۰۵ برابر $n = ۱۲$ و سال ۲۰۱۵ برابر $n = ۲۲$ است؛ از نمودار $f(12) = 15$ و $f(22) = 45$. شیب خط گذرنده از دو نقطه:

$$\frac{45 - 15}{22 - 12} = 3$$

ضابطه: $f(n) = 3n - 21 \Rightarrow f(n) - 15 = 3(n - 12)$. سال ۲۰۲۰ یعنی $n = ۲۷$ (۲۰۲۰ − ۱۹۹۳):

$$f(27) = 3 \times 27 - 21 = 60$$

طبق این مدل خطی، در سال ۲۰۲۰ حدود **۶۰ درصد** جمعیت جهان از اینترنت استفاده خواهند کرد.

۱۲ صفحه ۵۸ تمرین

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - ۱$ پیروی کنند، با توجه به دامنهٔ دنباله:

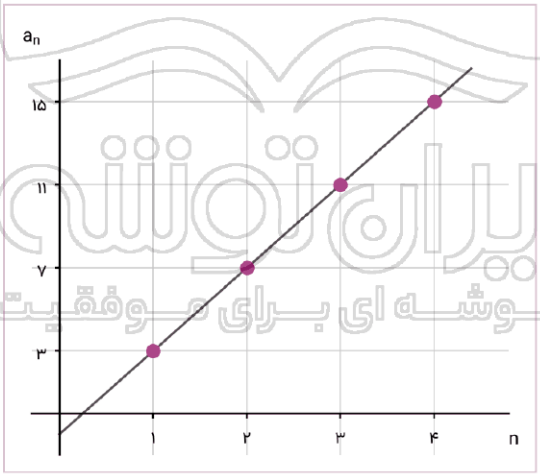
الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطهٔ بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطهٔ بازگشتی دنباله دارد؟

الف) دامنه‌ی دنباله $\mathbb{N}$ است؛ پس به جای x فقط اعداد طبیعی می‌گذاریم:

$$y(1) = 3,\ y(2) = 7,\ y(3) = 11,\ y(4) = 15,\ \ldots$$

نمودار تابع یک خط راست است و نمودار دنباله فقط نقطه‌هایی از این خط است که طولشان عدد طبیعی است:



ب) نمایش تابعی: $a_n = 4n - 1$ ؛ رابطه‌ی بازگشتی: $a_{n+1} = a_n + 4\ ,\ a_1 = 3$ (زیرا $a_{n+1} - a_n = 4(n + 1) - 1 - (4n - 1) = 4$).

شیب خط (۴) همان عددی است که در رابطه‌ی بازگشتی در هر مرحله به جمله‌ی قبل اضافه می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ صفحه ۵۸ تمرین

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، $d_n = n^2 - 1$ ، حاصل عبارت‌های خواسته‌شده را به‌دست آورید.

الف) $a_2 + b_1$ **ب)** $d_1 - c_2$ **ج)** $d_2 + b_4$

الف) $a_2 = 3^2 = 9$ و $b_1 = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ؛ پس $a_2 + b_1 = 9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$.

ب) $c_2 = \frac{1}{3\times 2 - 1} = \frac{1}{5}$ و $d_1 = 1^2 - 1 = 0$ ؛ پس $c_2 - d_1 = \frac{1}{5}$.

ج) $b_4 = (-\frac{1}{2})^5 = -\frac{1}{32}$ و $d_2 = 2^2 - 1 = 3$ ؛ پس $b_4 + d_2 = 3 - \frac{1}{32} = \frac{95}{32}$.

۱۴ صفحه ۵۸ تمرین

۶. جملهٔ پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = (1/3)\, a_n$ ، $a_1 = ۲-$ **ب)** $a_{n+1} = (a_n + 1)/1$ ، $a_1 = ۱$

ج) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = ۱$ **د)** $a_{n+1} = a_n + (-۱)^n$ ، $a_1 = ۱$

الف) $a_5 = -\frac{2}{81}$, $a_4 = -\frac{2}{27}$, $a_3 = -\frac{2}{9}$, $a_2 = -\frac{2}{3}$ ؛ پس جمله‌ی پنجم $-\frac{2}{81}$ است.

ب) $a_5 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$, $a_4 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

ج) $a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 3$ و $a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 = 5$.

د) $a_5 = 0 + (-1)^4 = 1$, $a_4 = 1 + (-1)^3 = 0$, $a_3 = 0 + (-1)^2 = 1$, $a_2 = 1 + (-1)^1 = 0$ ؛ جمله‌ی پنجم ۱ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵ صفحه ۵۹ تمرین

۷. جدول زیر را کامل کنید.

دنبالهٔ دو ضابطه‌ای	ضابطهٔ دنباله	رابطهٔ بازگشتی	جملات دنباله
			۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...
			۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...
			$۱, \frac{۱}{۲}, ۳, \frac{۱}{۴}, ۵, \frac{۱}{۶}, \ldots$
			$\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \ldots$

خانه‌های خاکستری (ضربدردار) پر نمی‌شوند.

جملات دنباله	رابطه‌ی بازگشتی	ضابطه‌ی دنباله	دنباله‌ی دو ضابطه‌ای
$5, 8, 11, 14, 17, \ldots$	$a_{n+1} = a_n + 3,\ a_1 = 5$	$a_n = 3n + 2$	—
$4, 1, 4, 1, 4, 1, \ldots$	$a_{n+1} = 5 - a_n,\ a_1 = 4$	—	$a_n = 4$ (n odd), $a_n = 1$ (n even)
$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots$	—	—	$a_n = n$ (n odd), $a_n = \frac{1}{n}$ (n even)
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$	—	$a_n = \frac{n}{n+1}$	—

توضیح: ردیف ۱ هر بار ۳ واحد اضافه می‌شود: $a_n = 5 + 3(n - 1) = 3n + 2$. ردیف ۲ بین ۴ و ۱ برمی‌گردد و $a_{n+1} = 5 - a_n$ (در جمله‌های فرد ۴ و در جمله‌های زوج ۱ است). پس $5 = 1 + 4$ ؛ ردیف ۳: جمله‌های فرد خودِ n و جمله‌های زوج $\frac{1}{n}$ هستند. ردیف ۴: صورت n و مخرج یکی بیشتر یعنی $n + 1$ است.

۱۶ صفحه ۵۹ تمرین

۸. شش جملهٔ اوّل دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+1} = a_n$ (1/2) برای n زوج و $a_{n+1} = 3a_n + 1$ برای n فرد را بنویسید. هرکدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$ ب) $a_1 = 25$

قاعده بر اساس زوج یا فرد بودن شماره‌ی جمله (n) است: n فرد: $a_{n+1} = 3a_n + 1$ ؛ n زوج: $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.

الف) $a_1 = 11$ ؛ $a_2 = 3 \times 11 + 1 = 34$ (n=1 فرد) ؛ $a_3 = \frac{34}{2} = 17$ (n=2 زوج) ؛ $a_4 = 3 \times 17 + 1 = 52$ ؛ $a_5 = \frac{52}{2} = 26$ ؛ $a_6 = 3 \times 26 + 1 = 79$. شش جمله: ۱۱ ، ۳۴ ، ۱۷ ، ۵۲ ، ۲۶ ، ۷۹

ب) $a_1 = 25$ ؛ $a_2 = 3 \times 25 + 1 = 76$ ؛ $a_3 = \frac{76}{2} = 38$ ؛ $a_4 = 3 \times 38 + 1 = 115$ ؛ $a_5 = \frac{115}{2} = 57.5$ ؛ $a_6 = 3 \times 57.5 + 1 = 173.5$. شش جمله: ۲۵ ، ۷۶ ، ۳۸ ، ۱۱۵ ، ۵۷٫۵ ، ۱۷۳٫۵

۱۷ صفحه ۵۹ تمرین

۹. نمودار دنباله‌های زیر را برای $n \le 5$ رسم کنید.

الف) $a_n = -(1/2)^{n+3}$ ب) $a_n = (-1/2)^n$

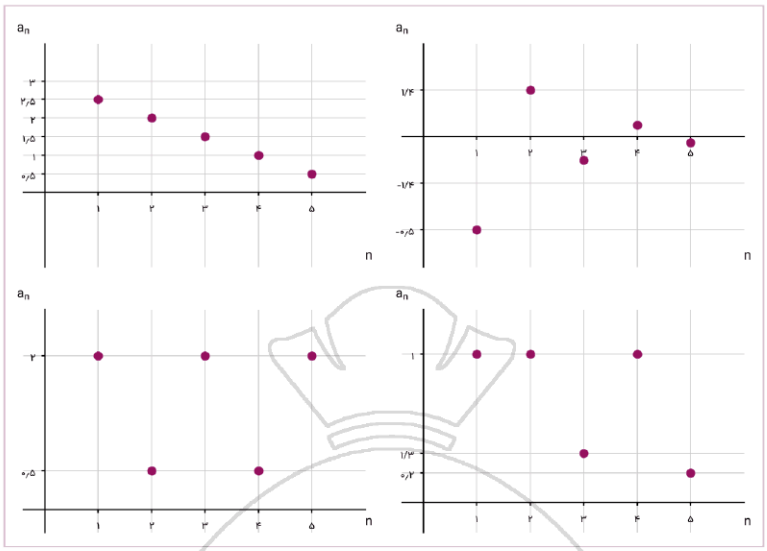
ج) $a_{n+1} = a_n/1$ ، $a_1 = 2$ د) $a_n = 1$ (n زوج) ، $a_n = n/1$ (n فرد)

ابتدا جمله‌های اول تا پنجم را حساب می‌کنیم و سپس نقطه‌های (n, a_n) را رسم می‌کنیم:

- الف) $2.5,\ 2,\ 1.5,\ 1,\ 0.5$

- ب) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$
- ج) $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2$
- د) $1, \frac{1}{5}, 1, \frac{1}{3}, 1$

نمودارها (سطر بالا از چپ به راست: الف و ب؛ سطر پایین از چپ به راست: ج و د):



۱۸ صفحه ۵۹ **تمرین**

۱۰. محاسبهٔ جذر اعداد در تمدن بابل ــ با نوشتن جملات دنبالهٔ بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شگفت‌انگیزی به جذر عدد k یعنی $\sqrt{k}$ نزدیک شویم.

$a_{n+1} = (1/2)(a_n + k/a_n)$ ، $a_1 = k$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است. به کمک دنبالهٔ بازگشتی بالا، اگر a_3 را تقریبی برای $\sqrt{k}$ در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

الف) $k = 2$: $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{2}) = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}) = \frac{17}{12} \approx 1.417$ ؛ پس $\sqrt{2} \approx 1.417$ (مقدار واقعی ۱٫۴۱۴...).

ب) $k = 3$: $a_1 = 3,\ a_2 = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2,\ a_3 = \frac{1}{2}(2 + \frac{3}{2}) = \frac{7}{4} = 1.75$ ؛ پس $\sqrt{3} \approx 1.75$ (مقدار واقعی ۱٫۷۳۲...).

ج) $k = 5$: $a_1 = 5,\ a_2 = \frac{1}{2}(5 + 1) = 3,\ a_3 = \frac{1}{2}(3 + \frac{5}{3}) = \frac{7}{3} \approx 2.33$ ؛ پس $\sqrt{5} \approx 2.33$ (مقدار واقعی ۲٫۲۳۶...).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مزیت: بله؛ این روش فقط از چهار عمل اصلی (جمع، تقسیم و ضرب در ½) استفاده می‌کند و بدون ماشین حساب هم با دست قابل انجام است. هرچه جمله‌های بیشتری بنویسیم، تقریب دقیق‌تر می‌شود. (ماشین حساب در حالت کلی سریع‌تر جذر را می‌دهد، ولی خودش هم برای محاسبه‌ی جذر از روش‌هایی مثل همین استفاده می‌کند.)

۱۹ صفحه ۶۰ تمرین

۱۱. جملات دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ، $a_1 = 1$ رأس کدام‌یک از الگوهای زیر را مشخص می‌کنند؟



جمله‌های دنباله: $a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 2 = 3,\ a_3 = 3 + 3 = 6,\ a_4 = 6 + 4 = 10,\ \ldots$

الگوی (الف): تعداد رأس‌ها (نقطه‌های صورتی) ۱ ، ۳ ، ۶ است (نقطه، مثلث با ۳ رأس، مثلث با ۶ نقطه که ۳ نقطه‌ی میانی هم دارد). الگوی (ب): ۱ ، ۴ ، ۹ (۹ نقطه در شکل سوم) که با دنباله‌ی ۱ ، ۳ ، ۶ نمی‌خواند.

پس دنباله، تعداد رأس‌های الگوی **(الف)** (عددهای مثلثی) را مشخص می‌کند.

۲۰ صفحه ۶۰ تمرین

۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پس‌ماندهای صنعتی کارخانه‌ها به یک دریاچه، ۲۵۰ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط‌زیست دریاچه سالیانه ۱۰٪ فاضلاب صنعتی را به‌صورت خنثی و بی‌اثر می‌کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است.

اگر $P_1 = 250$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطهٔ بازگشتی، میزان مواد آلودهٔ صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

در هر سال ۱۰٪ آلودگی از بین می‌رود (۹۰٪ می‌ماند) و ۱۵ تن آلودگی تازه وارد می‌شود:

$$P_{n+1} = 0.9\,P_n + 15 \quad , \quad P_1 = 250$$

چون P_1 آلودگی فعلی (سال صفر) است، بعد از دو سال P_3 و بعد از پنج سال P_6 را می‌خواهیم:

$$P_2 = 0.9 \times 250 + 15 = 240 \ ؛\ P_3 = 0.9 \times 240 + 15 = 231 \ ؛\ P_4 = 0.9 \times 231 + 15 = 222.9$$

$$P_5 = 0.9 \times 222.9 + 15 = 215.61 \ ؛\ P_6 = 0.9 \times 215.61 + 15 = 209.049$$

بعد از دو سال ۲۳۱ تن و بعد از پنج سال حدود ۲۰۹٫۰۵ تن مواد آلوده‌ی صنعتی در دریاچه باقی می‌ماند.

۲۱ صفحه ۶۰ بازی و ریاضی

آیا می‌توانید ده جملهٔ اوّل دنبالهٔ زیر را مشخص کنید؟ $a_1 = a_2 = 1$ ، $a_n = a_{n-a_{n-1}} + a_{n-a_{n-2}}$

هر جمله را از دو جمله‌ی قبل ولی با اندیس‌های جابه‌جاشده می‌سازیم:

- $a_3 = a_{3-a_2} + a_{3-a_1} = a_2 + a_2 = 2$
- $a_4 = a_{4-a_3} + a_{4-a_2} = a_2 + a_3 = 3$
- $a_5 = a_{5-a_4} + a_{5-a_3} = a_2 + a_3 = 3$
- $a_6 = a_{6-a_5} + a_{6-a_4} = a_3 + a_3 = 4$
- $a_7 = a_{7-a_6} + a_{7-a_5} = a_3 + a_4 = 5$
- $a_8 = a_{8-a_7} + a_{8-a_6} = a_3 + a_4 = 5$
- $a_9 = a_{9-a_8} + a_{9-a_7} = a_4 + a_4 = 6$
- $a_{10} = a_{10-a_9} + a_{10-a_8} = a_4 + a_5 = 6$

ده جمله‌ی اول: 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6

۲۲ صفحه ۶۱ فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان ــ زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طبس حرکت می‌کند.

الف) ضابطهٔ تابع و دامنه و برد آن را به‌دست آورید.

ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی‌شده در هر «یک ساعت» را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.

ج) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

د) جدول ۱ را به کمک نقشهٔ داده‌شده کامل کنید.

هـ) با فرض اینکه a_n مسافت طی‌شدهٔ قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

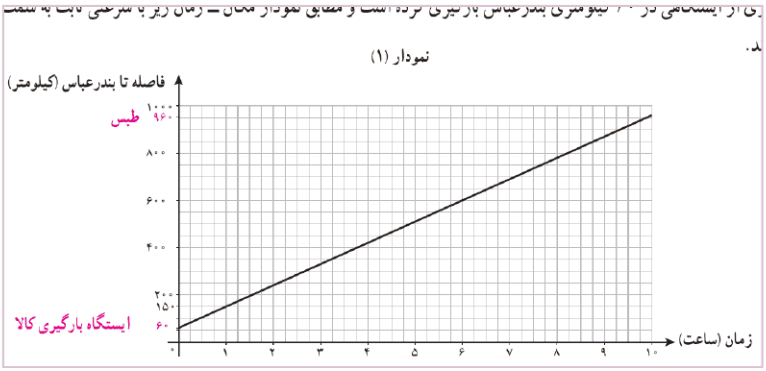
و) با مقایسهٔ جدول‌های ۱ و ۲، کدام ایستگاه‌ها محل تماس راهبر قطار بوده‌اند؟ چرا؟

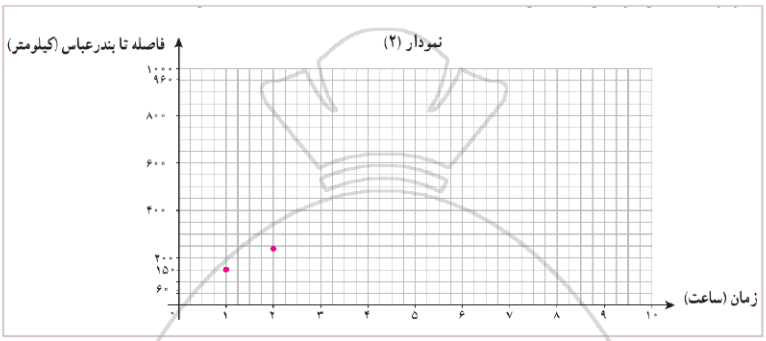
ز) با توجه به جدول ۲، ابتدا تساوی‌های زیر را کامل کنید: $a_3 = a_2 + \dots$ ؛ $a_1 = a_3 + \dots \times ۹۰$ ؛ $a_7 = a_6 + \dots$ ؛ $a_7 = a_1 + \dots \times ۹۰$ ؛ $a_{11} = a_{10} + \dots$ ؛ $a_{11} = a_1 + \dots \times ۹۰$ ؛ $a_8 = a_2 + \dots \times ۹۰$ ؛ $a_8 = a_5 + \dots \times ۹۰$. از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت: $a_n = a_1 + (\dots) \times ۹۰$ (۱) ؛ $a_n - a_{n-1} = \dots$ (رابطهٔ بازگشتی) ؛ $a_n - a_m = (\dots) \times ۹۰$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ح) کدام ویژگی دنبالهٔ a_n باعث برقراری روابط بالا شده است؟

ط) رابطهٔ (۱) در قسمت «ز» چه ارتباطی با ضابطهٔ تابع به‌دست‌آمده در قسمت «الف» دارد؟





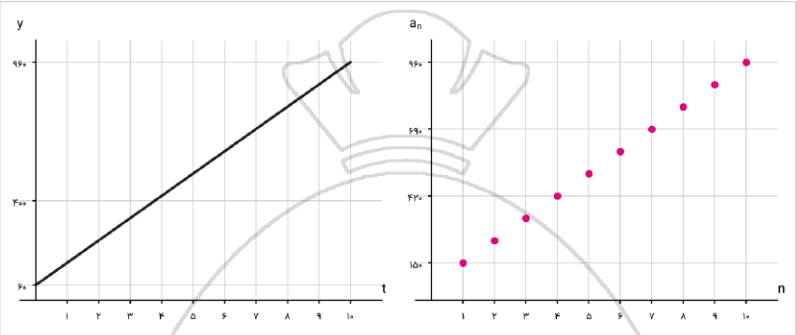


ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) مبدأ نمودار در ۶۰ کیلومتری بندرعباس است و پس از ۱۰ ساعت قطار در طبس (۹۶۰ کیلومتری) است؛ پس سرعت $\frac{960 - 60}{10} = 90$ کیلومتر بر ساعت است (شیب خط):

- $f(t) = 60 + 90t$
- $D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \le t \le 10\}$
- $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid 60 \le y \le 960\}$

ب) در پایان هر ساعت ($t = ۱$ تا ۱۰) نقطه‌هایی روی نمودار (۱) را به نمودار (۲) منتقل می‌کنیم: $(1, 150), (2, 240), (3, 330), \dots, (10, 960)$. نمودار (۱) خط پیوسته و نمودار (۲) نقطه‌های جداست:



ج) ضابطه در هر دو $60 + 90t$ است (در (۲) با نماد n)، ولی دامنه‌ی نمودار (۱) بازه‌ی $[0, 10]$ از اعداد حقیقی (خط پیوسته) و دامنه‌ی نمودار (۲) $\{1, 2, \dots, 10\}$ (زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$، نقطه‌های جدا) است. برد (۱) بازه‌ی $[60, 960]$ و برد (۲) فقط ده عدد $\{150, 240, \dots, 960\}$ است.

د) هر فاصله‌ی «فاصله تا بندرعباس» از جمع فاصله‌ی قبل و مسافت همان قطعه به‌دست می‌آید (۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵ و ...):

جدول ۱

نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندرعباس
ایستگاه بارگیری ــ تزرج	۱۲۵	۱۸۵ = ۱۲۵ + ۶۰
تزرج ــ گل‌گهر	۱۴۵	۳۳۰ = ۱۴۵ + ۱۸۵
گل‌گهر ــ سیرجان	۶۰	۳۹۰ = ۶۰ + ۳۳۰
سیرجان ــ میمند	۱۵۵	۵۴۵ = ۱۵۵ + ۳۹۰
میمند ــ بافق	۱۴۵	۶۹۰ = ۱۴۵ + ۵۴۵
بافق ــ جندق	۱۳۰	۸۲۰ = ۱۳۰ + ۶۹۰
جندق ــ طبس	۱۴۰	۹۶۰ = ۱۴۰ + ۸۲۰

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هـ) در هر ساعت ۹۰ کیلومتر به مسافت قبلی اضافه می‌شود، $a_n = a_{n-1} + 90$:

جدول ۲

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
a_n	۱۵۰	۲۴۰	۳۳۰	۴۲۰	۵۱۰	۶۰۰	۶۹۰	۷۸۰	۸۷۰	۹۶۰

(مثلاً $a_3 = a_2 + 90 = 240 + 90 = 330$ و $a_4 = 330 + 90 = 420$؛ هر مقدار a_n برابر فاصله‌ی قطار تا بندرعباس در پایان ساعت nام است.)

و) فاصله‌های جدول ۱ عبارت‌اند از ۱۸۵، ۳۳۰، ۳۹۰، ۵۴۵، ۶۹۰، ۸۲۰ و ۹۶۰ و جدول ۲ شامل ۱۵۰، ۲۴۰، ۳۳۰، ...، ۹۶۰ است. اعداد مشترک ۳۳۰ و ۶۹۰ و ۹۶۰ هستند؛ یعنی راهبر در پایان ساعت‌های سوم، هفتم و دهم دقیقاً در ایستگاه بوده است: **گل‌گهر (۳۳۰)، بافق (۶۹۰) و طبس (۹۶۰)**. زیرا راهبر فقط در پایان هر ساعت گزارش می‌دهد؛ پس یک ایستگاه زمانی محل تماس است که فاصله‌اش تا بندرعباس در جدول ۲ هم آمده باشد.

ز) در هر ساعت ۹۰ کیلومتر اضافه می‌شود:

- $a_3 = a_2 + 90$, $a_3 = a_1 + 2 \times 90$
- $a_7 = a_6 + 90$, $a_7 = a_1 + 6 \times 90$
- $a_{11} = a_{10} + 90$, $a_{11} = a_1 + 10 \times 90$
- $a_8 = a_2 + 6 \times 90$, $a_8 = a_5 + 3 \times 90$
- $a_n = a_1 + (n - 1) \times 90$ (1)
- $a_n - a_{n-1} = 90$ (recursive)
- $a_n - a_m = (n - m) \times 90$

ح) ویژگی دنباله این است که اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن عددی ثابت (۹۰) است؛ یعنی هر جمله با اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله‌ی قبل به‌دست می‌آید.

ط) چون $a_1 = 150$ ، رابطه‌ی (۱) می‌شود $a_n = 150 + (n - 1) \times 90 = 60 + 90n$ که همان ضابطه‌ی تابع قسمت (الف) است (با جایگذاری n به جای t).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۳ صفحه ۶۴ **کار در کلاس**

۱. ضابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.

در دنباله‌ی حسابی هر جمله از اضافه شدن d به جمله‌ی قبل به‌دست می‌آید:

$a_{n+1} = a_n + d$ (یعنی $a_n - a_{n-1} = d$) و جملهٔ اول a_1 داده می‌شود.

۲۴ صفحه ۶۴ — کار در کلاس

۲. مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک»، d، چه تأثیری در جملات دنبالهٔ حسابی دارد؟

- $d > 0$: هر جمله از قبلی بزرگ‌تر است؛ دنباله افزایشی (صعودی) است، مثل ۲ ، ۵ ، ۸ ، ....
- $d < 0$: هر جمله از قبلی کوچک‌تر است؛ دنباله کاهشی (نزولی) است، مثل ۴ ، ۱ ، −۲ ، ....
- $d = 0$: همه‌ی جمله‌ها برابرند؛ دنباله ثابت است، مثل ۵ ، ۵ ، ۵ ، ....

۲۵ صفحه ۶۴ — کار در کلاس

۳. جدول زیر را کامل کنید.

a_n	پنج جملهٔ اول	اختلاف مشترک	جملهٔ اول
		d	a
$a_n = ۲ + ۳(n-۱)$	۲ , ۵ , ۸ , ۱۱ , ۱۴	۳	۲
	۴ , ۱ , −۲ , −۵ , −۸		
		$-\frac{۱}{۲}$	۴
$a_n = -۳ + ۵(n-۱)$			

از رابطه‌ی $a_n = a + (n-1)d$ و فرمول اختلاف مشترک $d = a_2 - a_1$ استفاده می‌کنیم:

جمله‌ی اول	اختلاف مشترک	پنج جمله‌ی اول	a_n
a	d	a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d	$a_n = a + (n-1)d$
۲	۳	۲ ، ۵ ، ۸ ، ۱۱ ، ۱۴	$a_n = 2 + 3(n-1)$
۴	۳−	۴ ، ۱ ، −۲ ، −۵ ، −۸	$a_n = 4 - 3(n-1)$
۴	$-\frac{1}{2}$	$4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, 2$	$a_n = 4 - \frac{1}{2}(n-1)$
۳−	۵	−۳ ، ۲ ، ۷ ، ۱۲ ، ۱۷	$a_n = -3 + 5(n-1)$

مثلاً در ردیف سوم $d = 1 - 4 = -3$ ؛ و در ردیف چهارم $a_2 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ و $a_3 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$.

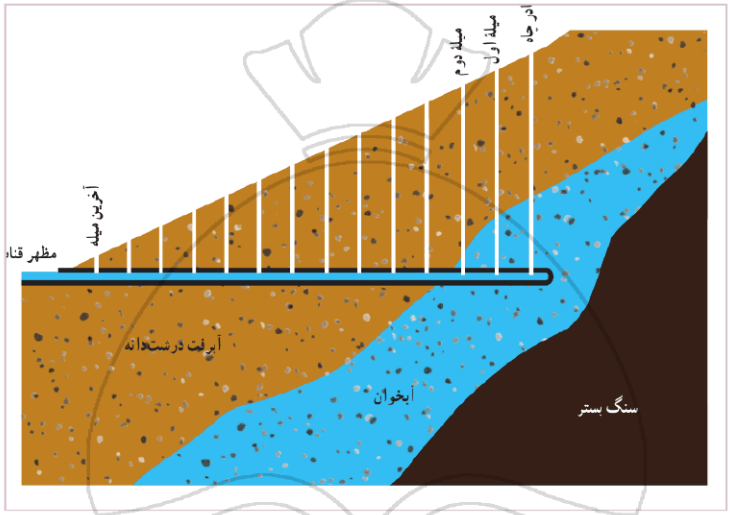
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۶ صفحه ۶۴ | کار در کلاس

قنات یا کاریز، راهِ آب یا کانالی است که در زیرزمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادرچاه» به‌دست آمده است، به منطقه‌ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل زیر، از چاه‌های کمکی به نام «میله» استفاده می‌کنند. میله‌ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقنّی در خارج‌کردن خاک‌های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات‌ها حفر می‌شوند.

در یک منطقه، مقنّی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه‌های کمکی در فاصله‌های یکسان از هم، عمق میلهٔ اول ۲۹/۵ متر و میلهٔ دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله‌ها کاهش یافته است.

اگر عمق آخرین میله ۱/۵ متر باشد، این مقنّی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟



عمق چاه‌ها (مادرچاه، میله‌ی اول، میله‌ی دوم، ...) دنباله‌ی حسابی است: 30, 29.5, 29, ... , 1.5 با $a_1 = 30$ و $d = -0.5$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 1.5 = 30 + (n-1)(-0.5)$$

$$-28.5 = -0.5(n-1) \Rightarrow n - 1 = 57 \Rightarrow n = 58$$

مقنّی در مجموع **۵۸ چاه** (یک مادرچاه و ۵۷ میله) حفر کرده است.

ایران توشه
توشه راهی برای موفقیت

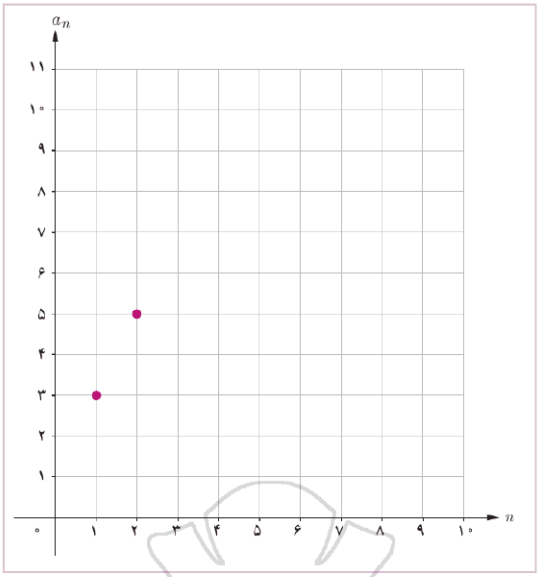
۲۷ صفحه ۶۶ | فعالیت

دنبالهٔ حسابی $a_n = ۳ + ۲(n-۱)$ را در نظر بگیرید.

الف) با محاسبهٔ سه جملهٔ دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادلهٔ خطی را که از دو نقطهٔ اول و دوم می‌گذرد، به‌دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطهٔ خط به‌دست‌آمده صدق می‌کنند؟

ج) شیب خط به‌دست‌آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنبالهٔ حسابی) دارد؟

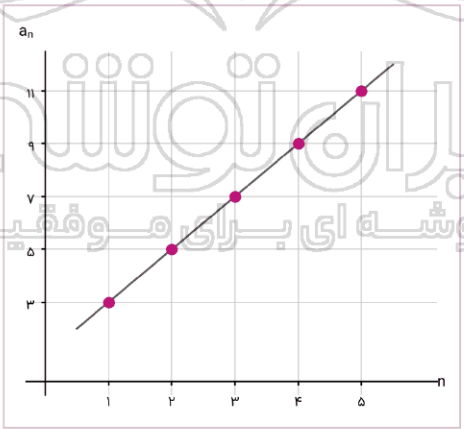


الف) $a_3 = 3 + 2 \times 2 = 7,\ a_4 = 3 + 2 \times 3 = 9,\ a_5 = 3 + 2 \times 4 = 11$ ؛ نقاط $(3,7),\ (4,9),\ (5,11)$ را روی نمودار می‌گذاریم.

ب) نقطه‌های اول و دوم: $(1,3)$ و $(2,5)$. شیب: $\frac{5-3}{2-1} = 2$ ؛ معادله: $y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 1$.

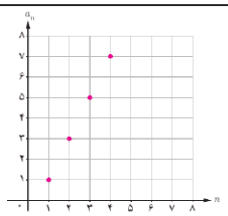
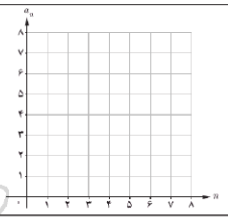
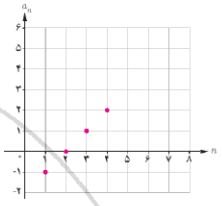
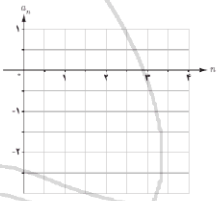
برای نقطه‌های دیگر داریم: $2 \times 3 + 1 = 7,\ 2 \times 4 + 1 = 9,\ 2 \times 5 + 1 = 11$ ؛ پس همه‌ی نقاط دنباله روی این خط‌اند. (در واقع $a_n = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$).

ج) شیب خط (۲) برابر اختلاف مشترک دنباله ($d = 2$) است.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

جدول زیر را کامل کنید.

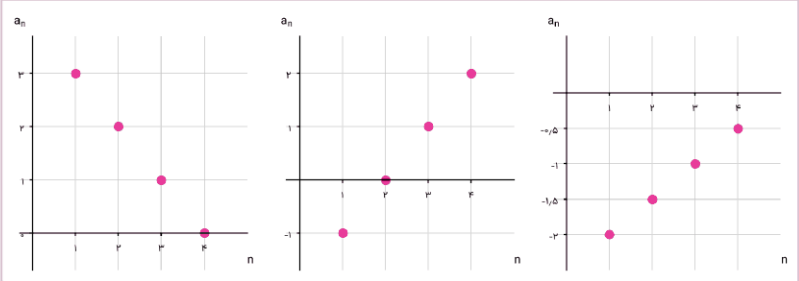
نمودار دنباله	چهار جملهٔ اول دنباله	دنبالهٔ ساخته شده از تابع	ضابطهٔ تابع
	۱, ۳, ۵, ۷	$a_n = ۲n - ۱$	$y = ۲x - ۱$
			$y = -x + ۴$
			
	$-۲, -\frac{۳}{۲}, -۱, -\frac{۱}{۲}$		

هر تابع خطی $y = ax + b$ با دامنه‌ی $\mathbb{N}$ یک دنباله‌ی حسابی با اختلاف مشترک $d = a$ (شیب خط) می‌سازد؛ و برعکس.

ضابطه‌ی تابع	دنباله‌ی ساخته‌شده از تابع	چهار جمله‌ی اول دنباله
$y = -x + 4$	$a_n = -n + 4$	۰، ۱، ۲، ۳
$y = x - 2$	$a_n = n - 2$	-۱، ۰، ۱، ۲
$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$	$a_n = \frac{1}{2}n - \frac{5}{2}$	$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$

ردیف سوم (از روی نمودار): نقطه‌های $(1, -1), (2, 0), (3, 1), (4, 2)$ شیب $d = 1$ و $a_1 = -1$ دارند؛ پس $a_n = -1 + (n - 1) = n - 2$ و تابع $y = x - 2$. ردیف چهارم (از جمله‌ها): $a_1 = -2, d = \frac{1}{2}$؛ $a_n = -2 + \frac{1}{2}(n - 1) = \frac{n - 5}{2}$ و تابع $y = \frac{x - 5}{2}$. نمودار ردیف‌های ۲ و ۳ و ۴ (از چپ به راست):

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



۲۹ صفحه ۶۸ **فعالیت**

پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می‌شود. اگر شخصی که سابقهٔ سکتهٔ قلبی دارد، با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی‌گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی‌گرم دارو در سطح خونش کاهش یابد:

الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳۰ میلی‌گرم می‌شود؟

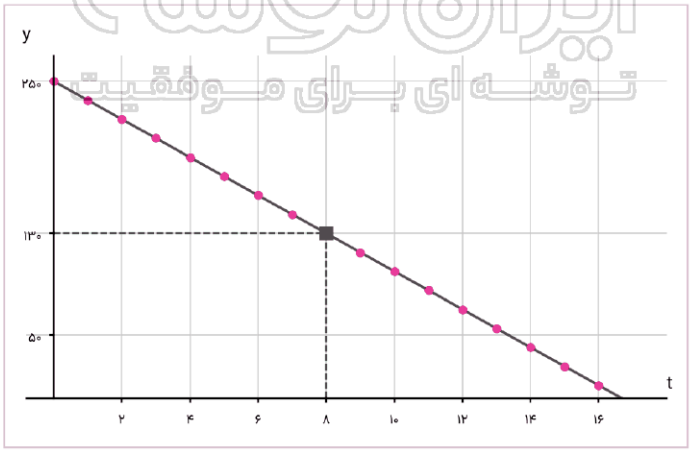
ب) نمودار «سطح دارو در بدن ــ زمان» مسئلهٔ بالا را رسم کنید.

ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او ۱۳۰ میلی‌گرم خواهد شد؟

اگر y سطح دارو (میلی‌گرم) و t زمان بر حسب ساعت باشد، هر ساعت ۱۵ واحد کم می‌شود: $y = 250 - 15t$.

الف) $250 - 15t = 130 \Rightarrow 15t = 120 \Rightarrow t = 8$ ؛ پس **۸ ساعت** بعد از مصرف دارو.

ب) نمودار پاره‌خطی است که از نقطه‌ی $(0, 250)$ شروع می‌شود و با شیب -15 پایین می‌آید تا در $t = \frac{250}{15} \approx 16.7$ ساعت به صفر برسد (نقطه‌های هر ساعت: $250, 235, 220, \ldots$). نقطه‌ی (۸ ، ۱۳۰) روی نمودار است.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ج) پس از ۵ ساعت سطح دارو $250 - 15 \times 5 = 175$ است. با مصرف قرص دوم ۲۵۰ میلی‌گرم اضافه می‌شود: $175 + 250 = 425$. از آن لحظه: $425 - 15t = 130 \Rightarrow t = \frac{295}{15} = \frac{59}{3} \approx 19.7$ ساعت. یعنی حدود ۱۹ ساعت و ۴۰ دقیقه پس از مصرف قرص دوم (حدود ۲۴٫۷ ساعت پس از مصرف قرص اول) سطح دارو ۱۳۰ میلی‌گرم می‌شود.

---

۳۰ صفحه ۶۸ — کار در کلاس

درآمد کارمندی در یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۷/۸۰۰/۰۰۰ تومان است که ۱۰٪ آن به‌عنوان مالیات کسر می‌شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه‌کاری ۳۳ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه‌کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه‌کاری دریافتی خالص ماهیانهٔ او ۹ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را ۳۰ روزه در نظر بگیرید.)

با توجه به فرض مسئله مبنی بر دریافت ۳۳ هزار تومان اضافه‌کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه‌کاری از یک دنبالهٔ عددی پیروی می‌کند. بنابراین، اگر a_1 میزان دریافتی شخص پس از یک ساعت اضافه‌کاری باشد، جملهٔ آخر دنباله باید برابر با مبلغ ..... تومان باشد؛ یعنی در رابطهٔ $a_n = a_1 + d(n-1)$ باید .....

حقوق خالص بدون اضافه‌کاری: $7,800,000 - 10\% \times 7,800,000 = 7,020,000$ تومان. برای رسیدن به ۹ میلیون باید $9,000,000 - 7,020,000 = 1,980,000$ تومان از اضافه‌کاری به دست آید.

دریافتی بعد از ۱، ۲، ۳، ... ساعت: ۳۳,۰۰۰ ، ۶۶,۰۰۰ ، ۹۹,۰۰۰ ، ... دنباله‌ی حسابی با $a_1 = 33000$ و $d = 33000$ است. جمله‌ی آخر باید ۱,۹۸۰,۰۰۰ تومان باشد، یعنی در $a_n = a_1 + (n-1)d$ باید $1980000 = 33000 + (n-1) \times 33000$:

$$(n-1) = \frac{1980000 - 33000}{33000} = 59 \Rightarrow n = 60$$

۶۰ ساعت اضافه‌کاری در ماه لازم است؛ در ماه ۳۰ روزه، $\frac{60}{30} = 2$ ساعت اضافه‌کاری در روز. پاسخ: **روزانه ۲ ساعت**.

---

۳۱ صفحه ۷۰ — کار در کلاس

۱. مجموع دنباله‌های حسابی زیر را به‌دست آورید.

الف) ۱- و ۴ و ۹ و ..... و ۱۹۹ ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ ، $a_1 = -2$ ، $S_{10} = ?$

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطهٔ بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.)

از $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ استفاده می‌کنیم.

الف) $a_1 = -1,\ d = 5,\ a_n = 199$ ؛ $199 = -1 + (n-1)5 \Rightarrow n = 41$ و

$S_{41} = \frac{41}{2}(-1 + 199) = 41 \times 99 = 4059$.

ب) جمله‌ها: $-2, 3, 8, 13, \ldots$ (هر بار ۵ واحد بیشتر) ؛ $a_{10} = -2 + 9 \times 5 = 43$ و

$S_{10} = \frac{10}{2}(-2 + 43) = 5 \times 41 = 205$.

---

۳۲ صفحه ۷۰ کار در کلاس

۲. مجموع سی جملهٔ اول اعداد فرد را به‌دست آورید. $a_1 = ۱$ ، $a_n = a_1 + (n - ۱)d = \ldots\ldots$ ، $S_{30} = \ldots\ldots = (a_1 + a_{30})$

اعداد فرد: $1, 3, 5, \ldots$ با $a_1 = 1$ و $d = 2$ ؛ پس $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$ و $a_{30} = 59$.

$S_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = 15 \times (1 + 59) = 900$

---

۳۳ صفحه ۷۰ کار در کلاس

۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

با توجه به معلوم بودن $S_n = ۸۷۰$ برای به‌دست آوردن n یعنی تعداد ردیف‌ها، از رابطهٔ $S_n = (n/2)(۲a_1 + (n-۱)d)$ با جای‌گذاری $d = \ldots\ldots$ در رابطهٔ بالا $n = \ldots\ldots$ به‌دست می‌آید.

تعداد صندلی‌ها دنباله‌ی حسابی $15, 18, 21, \ldots$ با $a_1 = 15$ و $d = 3$ است. با جای‌گذاری در $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$:

$870 = \frac{n}{2}(30 + 3(n-1)) \Rightarrow 1740 = n(3n + 27) \Rightarrow n^2 + 9n - 580 = 0$

$(n - 20)(n + 29) = 0 \Rightarrow n = 20$ (مقدار منفی ۲۹- قابل قبول نیست). سالن باید **۲۰ ردیف** صندلی داشته باشد.

بررسی: $a_{20} = 15 + 19 \times 3 = 72$ و $S_{20} = 10(15 + 72) = 870$.

---

۳۴ صفحه ۷۱ تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنبالهٔ حسابی است.

الف) $a_{n+1} = a_n / ۱$ **ب)** $a_1 = ۲$ ، $a_{n+1} = a_n + ۵$ ، $a_1 = -۱$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$، $a_1 = -1$ د) $a_n - a_{n+1} = n$

دنباله‌ی حسابی یعنی اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی ثابت باشد.

- الف) $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ ؛ اختلاف‌ها $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots$ ثابت نیست؛ حسابی نیست.
- ب) $-1, 4, 9, 14, \ldots$ ؛ اختلاف همیشه ۵ است؛ **حسابی است**.
- ج) $-3, -15, \ldots -19, -4, -1$ ؛ اختلاف‌ها ؛ حسابی نیست.
- د) $a_{n+1} - a_n = n$: اختلاف‌ها ۱، ۲، ۳، ... است و ثابت نیست؛ حسابی نیست.

فقط دنباله‌ی (ب) حسابی است.

۳۵ صفحه ۷۱ تمرین

۲. در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جملهٔ دنباله برابر ۵۵۵ است؟

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 555 = -5 + (n-1) \times 8$

$560 = 8(n-1) \Rightarrow n - 1 = 70 \Rightarrow n = 71$

جمله‌ی **هفتاد و یکم** برابر ۵۵۵ است.

۳۶ صفحه ۷۱ تمرین

۳. یازدهمین جملهٔ یک دنبالهٔ حسابی ۵۲ و جملهٔ نوزدهم آن ۹۲ است. جملهٔ سی‌اُم این دنباله را مشخص کنید.

از رابطه‌ی $a_n - a_m = (n-m)d$: $d = 5 \Rightarrow 92 - 52 = 8d \Rightarrow a_{19} - a_{11} = 8d$.

$a_{30} = a_{19} + 11d = 92 + 11 \times 5 = 147$

(بررسی: $a_1 = 52 - 10 \times 5 = 2$ و $a_{30} = 2 + 29 \times 5 = 147$)

۳۷ صفحه ۷۱ تمرین

۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصلهٔ اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصلهٔ هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)

فاصله‌ی چرخ‌ها از موتور (محور چرخش) دنباله‌ی حسابی $3, 8, 13, \dots$ با $a_1 = 3$ و $d = 5$ است. آخرین چرخ (دوازدهم) در انتهای میله است:

$$a_{12} = 3 + 11 \times 5 = 58$$

میله با طول ۵۸ متر حول محور می‌چرخد و دایره‌ای به شعاع ۵۸ متر را آبیاری می‌کند:

$$S = \pi r^2 = \pi \times 58^2 = 3364\pi \approx 10563$$

مساحت آبیاری‌شده حدود **۱۰,۵۶۳ ≈ ۳۳۶۴π متر مربع** (با $\pi \approx 3{,}14$) است.

۳۸ صفحه ۷۱ تمرین

۵. در یک کارخانهٔ سنگبری برای صیقل‌دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به‌طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفادهٔ مداوم وزن صفحه چقدر است؟

وزن صفحه بعد از هر هفته ۱۸۷۵ گرم کم می‌شود؛ دنباله‌ی حسابی با $a_1 = 12500$ (شروع) و $d = -1875$.

بعد از ۶ هفته:

$$12500 - 6 \times 1875 = 12500 - 11250 = 1250$$

وزن صفحه پس از شش هفته **۱۲۵۰ گرم** است. (جمله‌ی هفتم دنباله: $a_7 = a_1 + 6d = 1250$)

۳۹ صفحه ۷۱ تمرین

۶. میان دو عدد a و b، n عدد را به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطهٔ $d = (b - a)/(n + 1)$ به‌دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n + 2)$ جمله است.)

جمله‌ی اول a و جمله‌ی آخر (جمله‌ی $(n + 2)$ام) برابر b است. طبق $a_k = a_1 + (k - 1)d$:

$$b = a + (n + 2 - 1)d = a + (n + 1)d$$

$$(n + 1)d = b - a \Rightarrow d = \frac{b - a}{n + 1}$$

و این همان حکم خواسته‌شده است. ∎

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۰ صفحه ۷۱ تمرین

۷. براساس رابطهٔ به‌دست‌آمده در مسئلهٔ ۶، سه عدد را به‌گونه‌ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند.

$a = 10,\ b = 18,\ n = 3$

$d = \frac{18 - 10}{3 + 1} = 2$

دنباله: ۱۰ ، ۱۲ ، ۱۴ ، ۱۶ ، ۱۸ ؛ پس سه عدد **۱۲ ، ۱۴ و ۱۶** هستند.

۴۱ صفحه ۷۱ تمرین

۸. مجموع عددهای زیر را به‌دست آورید.

الف) ۱ و ۵ و ۹ و ..... و ۴۰۱ ب) ۱۳ و ..... و ۸۱ و ۸۵ و ۸۹

الف) $a_1 = 1,\ d = 4,\ a_n = 401$ ؛ $401 = 1 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 101$ ؛

$S_{101} = \frac{101}{2}(1 + 401) = 101 \times 201 = 20301$.

ب) $d = 85 - 81 = 4$ ؛ $a_1 = 13,\ a_n = 89$ ؛ $89 = 13 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 20$ ؛

$S_{20} = \frac{20}{2}(13 + 89) = 10 \times 102 = 1020$.

۴۲ صفحه ۷۲ تمرین

۹. باغ‌داران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.
اگر عرض نخستین پلهٔ این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پلهٔ آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پلهٔ پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

عرض پله‌ها دنباله‌ی حسابی $125, 115, 105, \ldots, 45$ با $a_1 = 125$ و $d = -10$ است:

$45 = 125 + (n - 1)(-10) \Rightarrow n - 1 = 8 \Rightarrow n = 9$

نردبان ۹ پله دارد. مجموع عرض پله‌ها (طول چوب لازم برای پله‌ها):

$S_9 = \frac{9}{2}(125 + 45) = 9 \times 85 = 765\ cm = 7.65\ m$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

برای ساخت پله‌ها **۷٫۶۵ متر** چوب لازم است.

۴۳ صفحه ۷۲ تمرین

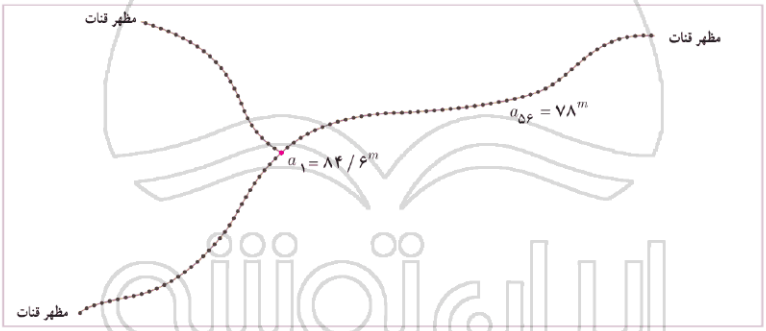
۱۰. ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی‌ترین قنات ایران ــ عمق مادرچاه قنات زارچ ۸۴/۶ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق میلهٔ پنجاه و ششم ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصلهٔ میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله) ۱۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شود:

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفرشده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفرشده در کل قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینهٔ حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵۰ هزار تومان باشد، هزینهٔ حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ، در مجموع طول کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینهٔ ۳۵۰ هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی: a_n را عمق چاه nام تا کانال قنات و a_1 را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.)



عمق چاه‌ها دنباله‌ی حسابی با $a_1 = 84.6$ (مادرچاه) است و $a_{56} = 78$:

$$d = \frac{a_{56} - a_1}{55} = \frac{78 - 84.6}{55} = -0.12$$

الف) عمق آخرین چاه ۱۲۰ سانتی‌متر یعنی ۱٫۲ متر است:

$$1.2 = 84.6 + (n - 1)(-0.12) \Rightarrow n - 1 = 695 \Rightarrow n = 696$$

در هر شاخه ۶۹۶ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله وجود دارد؛ یعنی هر شاخه **۶۹۵ میله** دارد.

ب) مجموع طول چاه‌ها در یک مسیر (شاخه):

$$S_{696} = \frac{696}{2}(84.6 + 1.2) = 348 \times 85.8 = 29858.4$$

یعنی ۲۹,۸۵۸٫۴ متر. در کل قنات سه شاخه داریم که مادرچاه مشترک است (۸۴٫۶ متر را دو بار اضافه شمرده‌ایم):

ایران توشه
توشه‌ای برای سرفصلیت

$3 \times 29858.4 - 2 \times 84.6 = 89575.2 - 169.2 = 89406$

مجموع طول چاه‌ها در کل قنات ۸۹٬۴۰۶ متر است.

ج) $89406 \times 250000 = 22{,}351{,}500{,}000$ تومان (حدود ۲۲٫۳۵ میلیارد تومان).

د) هزینه‌ی کانال: $71000 \times 350000 = 24{,}850{,}000{,}000$ تومان. ارزش کل قنات:

$22{,}351{,}500{,}000 + 24{,}850{,}000{,}000 = 47{,}201{,}500{,}000$

یعنی حدود ۴۷٫۲ میلیارد تومان.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت